

Занятие 6. 2019-09-09

Двумерное движение с постоянным ускорением

Обсуждение ДЗ

Разбираем вопросы по ДЗ, исправляем ошибки, дорешиваем задачи.

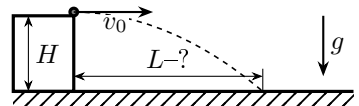
Вопросы (устно)

- ✓ **6.1.** Тело движется прямолинейно и равномерно вдоль оси Ox . Как найти проекцию его перемещения s_x за время t ?
(pr2828; I)
- ✓ **6.2.** Какое движение называется равноускоренным?
(pr3082; I)
- ✓ **6.3.** Сформулируйте закон для скорости при равноускоренном движении.
(pr3083; I)
- ✓ **6.4.** Сформулируйте закон для перемещения при равноускоренном движении.
(pr3084; I)
- ✓ **6.5.** Что такое свободное падение?
(pr3833; I)
- ✓ **6.6.** Что такое ускорение свободного падения?
(pr3834; I)

Задачи: базовый уровень

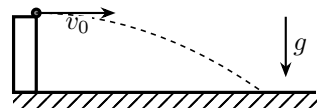
Горизонтальный бросок

- ✓ **6.7.** Тело бросают горизонтально с начальной скоростью $v_0 = 5 \text{ м/с}$ с края стола высотой $H = 1 \text{ м}$. Найти, на каком расстоянии от стола приземлится тело. Ускорение свободного падения $g = 9.8 \text{ м/с}^2$.



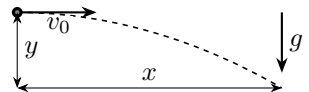
(pr51; II)

- ✓ **6.8.** Тело бросают горизонтально с края стола. Если начальную скорость увеличить вдвое, как изменится время падения? А расстояние, пройденное по горизонтали до точки приземления?



(pr4225; II)

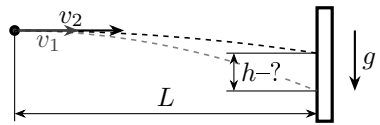
- ✓ **6.9.** Камень бросают с обрыва в горизонтальном направлении с начальной скоростью v_0 . Найдите зависимость перемещения камня y по вертикали от перемещения x по горизонтали, если ускорение свободного падения равно g . Какой вид имеет эта зависимость? Что из себя представляет траектория камня?



(pr4227; II)

✓ **6.10.** В мишень с расстояния $L = 100$ м сделано два выстрела при горизонтальной наводке винтовки. Скорость первой пули $v_1 = 800$ м/с, а второй $v_2 = 850$ м/с (причём $v_2 > v_1$). Определить расстояние между пробоинами в мишени. Ускорение свободного падения $g = 9.8$ м/с².

(pr519; Русаков-1, 3.4; III)



Бросок под углом: x и y

✓ **6.11.** Камень бросают с начальной скоростью $v_0 = 20$ м/с под углом $\alpha = 60^\circ$ к горизонту. На какой высоте камень окажется через время $t = 1$ с после броска? Ускорение свободного падения $g = 9.8$ м/с².

(pr4270; I)

✓ **6.12.** Камень бросают с начальной скоростью $v_0 = 20$ м/с под углом $\alpha = 60^\circ$ к горизонту. На какое расстояние по горизонтали камень сместится через время $t = 1$ с после броска? Ускорение свободного падения $g = 9.8$ м/с².

(pr4271; I)

Бросок под углом: наивысшая точка

✓ **6.13.** Камень бросают с начальной скоростью v_0 под углом α к горизонту. Через какое время камень достигнет максимальной высоты? Ускорение свободного падения g .

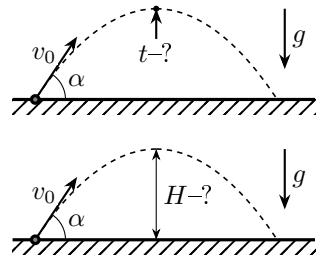
(pr4248; I)

✓ **6.14.** Тело бросают с начальной скоростью $v_0 = 14$ м/с под углом $\alpha = 60^\circ$ к горизонту. Найти максимальную высоту подъема. Ускорение свободного падения $g = 9.8$ м/с².

(pr50; II)

✓ **6.15.** Камень бросают под углом к горизонту. Если бросить со вдвое большей скоростью под тем же углом, то во сколько раз увеличится время подъема до наивысшей точки? А максимальная высота подъема?

(pr4250; II)



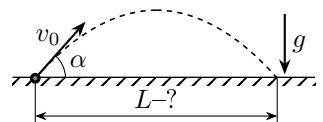
Бросок под углом: дальность

✓ **6.16.** Камень бросают с горизонтальной поверхности с начальной скоростью v_0 под углом α к горизонту. Через какое время камень приземлится на поверхность? Ускорение свободного падения g .

(pr4249; I)

✓ **6.17.** Тело бросают с начальной скоростью $v_0 = 11$ м/с под углом $\alpha = 35^\circ$ к горизонту. Ускорение свободного падения $g = 9.8$ м/с². Найти расстояние от точки броска до точки приземления.

(pr550; III)



✓ **6.18.** Камень бросают с горизонтальной плоскости под углом к горизонту. Если бросить со вдвое большей скоростью под тем же углом, то во сколько раз увеличится время полёта до приземления? А расстояние от точки броска до точки приземления?

(pr4251; II)

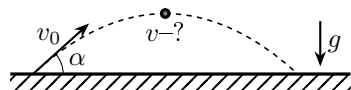
✓ **6.19.** Тело бросают с начальной скоростью $v_0 = 14 \text{ м/с}$ под углом к горизонту. Ускорение свободного падения $g = 9.8 \text{ м/с}^2$. При каком угле броска дальность полета будет максимальной? Найти эту дальность.

(pr549; IV)

Бросок под углом: скорость в наивысшей точке

✓ **6.20.** Тело брошено со скоростью $v_0 = 20 \text{ м/с}$ под углом $\alpha = 50^\circ$ к горизонту. Определить скорость тела в верхней точке траектории.

(pr518; Русаков-1, 3.3; I)



Ответы

7. $l = v_0 \sqrt{\frac{2H}{g}} \approx 2.26 \text{ м}$

8. не изменится; увеличится вдвое

9. $y = \frac{gx^2}{2v_0^2}$; квадратичная; дуга параболы

10. $\Delta h = \frac{gL^2}{2} \left(\frac{1}{v_1^2} - \frac{1}{v_2^2} \right) \approx 9 \text{ мм}$

11. $h = v_0 \sin \alpha t - \frac{gt^2}{2} \approx 12 \text{ м}$

12. $h = v_0 \cos \alpha t = 10 \text{ м}$

13. $t = \frac{v_0 \sin \alpha}{g}$

14. $H_{\max} = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g} = 7.5 \text{ м}$

15. в 2 раза; в 4 раза

16. $t = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g}$

17. $L = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g} \approx 11.6 \text{ м}$

18. в 2 раза; в 4 раза

19. $\alpha^* = 45^\circ$, $L_{\max} = \frac{v_0^2}{g} = 20 \text{ м}$

20. $v = v_0 \cos \alpha \approx 12.9 \text{ м/с}$

Задачи: продвинутый уровень

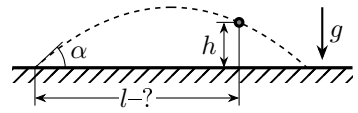
Бросок под углом: высота и дальность

✓ **6.21.** Под каким углом α к горизонту нужно направить струю воды, чтобы высота ее подъема была равна дальности?

(pr2037; Гельфгат, 1.43; IV)

✓ 6.22. Мяч, брошенный под углом $\alpha = 55^\circ$ к горизонту, через время $t = 2$ с попадает в точку, находящуюся на высоте $h = 8$ м. Найти расстояние, которое пролетел мяч по горизонтали к этому моменту. Ускорение свободного падения $g = 9.8 \text{ м/с}^2$.

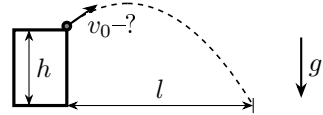
(pr545; Русаков-1, 3.44; III)



Избавляемся от угла

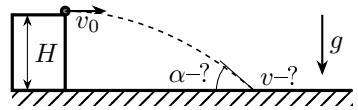
✓ 6.23. Спортсмен прыгает с вышки высотой $h = 10$ м и входит в воду через время $t = 2$ с на расстоянии $l = 8$ м от вышки. С какой скоростью прыгнул спортсмен? Ускорение свободного падения $g = 9.8 \text{ м/с}^2$.

(pr66; Козел, 1.9; III)



✓ 6.24. Тело бросают горизонтально с начальной скоростью $v_0 = 5 \text{ м/с}$ с края стола высотой $H = 1$ м. Найти направление и модуль скорости тела перед приземлением. Ускорение свободного падения $g = 9.8 \text{ м/с}^2$.

(pr548; III)



Скорость

✓ 6.25. Тело бросили под углом $\alpha = 75^\circ$ к горизонту с начальной скоростью $v_0 = 12 \text{ м/с}$. Сколько пройдет времени до момента, когда скорость тела будет направлена вверх под углом $\beta = 55^\circ$ к горизонту? Чему равна скорость тела в этот момент? Ускорение свободного падения $g = 9.8 \text{ м/с}^2$.

(pr53; Савченко, 1.3.5; III)

(!) 6.26. Тело брошено под углом к горизонту со скоростью $v_0 = 12 \text{ м/с}$. Найти скорость тела на высоте $h = 3$ м. Ускорение свободного падения $g = 9.8 \text{ м/с}^2$.

(pr543; Русаков-1, 3.40; IV)

#1: (!). Доделать. Не бойся вводить углы: от них можно будет избавиться, как ты это делал в задачах 23 и 24.

Ответы

21. $\alpha = \arctg 4 \approx 76^\circ$

22. $l = \left(h + \frac{gt^2}{2} \right) \text{ctg } \alpha \approx 19.3 \text{ м}$

23. $v_0 = \sqrt{\left(\frac{l}{t} \right)^2 + \left(\frac{gt}{2} - \frac{h}{t} \right)^2} \approx 6.25 \text{ м/с}$

24. $v_k = \sqrt{v_0^2 + 2gH} \approx 6.68 \text{ м/с}$, угол с горизонталью $\alpha = \arctg \frac{\sqrt{2gH}}{v_0} \approx 42^\circ$

25. $t = \frac{v_0(\sin \alpha - \cos \alpha \text{tg } \beta)}{g} \approx 0.73 \text{ с}$, $v = \frac{v_0 \cos \alpha}{\cos \beta} \approx 5.41 \text{ м/с}$

26. $v = \sqrt{v_0^2 - 2gh} \approx 9.23 \text{ м/с}$

Домашнее задание

Закрепление: базовый уровень

6.27. Камень бросают с начальной скоростью $v_0 = 20 \text{ м/с}$ под углом $\alpha = 60^\circ$ к горизонту. На каком расстоянии от начальной точки камень окажется через время $t = 1 \text{ с}$ после броска? Ускорение свободного падения $g = 9.8 \text{ м/с}^2$.

(pr4272; II)

6.28. Камень бросают с начальной скоростью v_0 под углом α к горизонту. На какой высоте он окажется через время, равное половине времени подъёма до наивысшей точки? Ускорение свободного падения g .

(pr4299; III)

6.29. Камень бросили со скоростью $v_0 = 12 \text{ м/с}$. Когда он достиг наивысшей точки траектории, его скорость стала равна $v = 6 \text{ м/с}$. Под каким углом к горизонту бросили камень?

(pr4567; I)

6.30. По мячу, находящемуся на горизонтальной плоскости, ударяют так, чтобы он приземлился на расстоянии $L = 45 \text{ м}$ от места удара. При какой минимальной начальной скорости мяча это возможно? Под каким углом к горизонту она должна быть направлена? Ускорение свободного падения $g = 9.8 \text{ м/с}^2$.

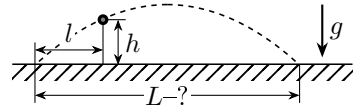
(pr1998; IV)

Закрепление: продвинутый уровень

6.31. Под каким углом α к горизонту нужно бросить камень, чтобы высота его подъёма была вдвое меньше дальности?

(pr4373; IV)

6.32. После удара о пол мяч через время $t = 1 \text{ с}$ оказался на высоте $h = 3 \text{ м}$ на расстоянии $l = 2 \text{ м}$ по горизонтали от места удара. На каком расстоянии L от места удара он снова ударится о пол? Ускорение свободного падения $g = 9.8 \text{ м/с}^2$, влиянием воздуха на движение мяча пренебречь.



(pr61; Всесиб-2014; IV)

6.33. Дальность полета тела, брошенного под углом к горизонту, равна $L = 50 \text{ м}$, а время полета $t = 3 \text{ с}$. Определить наибольшую высоту подъема тела, скорость и угол броска. Ускорение свободного падения $g = 9.8 \text{ м/с}^2$.

(pr546; Русаков-1, 3.45; IV)

6.34. Тело бросают с обрыва горизонтально с начальной скоростью v_0 . Найдите скорость тела, когда оно пройдет по горизонтали расстояние L . Ускорение свободного падения g .

(pr4255; III)

6.35. Камень бросают со скоростью $v_0 = 10 \text{ м/с}$ под углом $\alpha = 60^\circ$ к горизонту. Найдите скорость камня и угол её наклона к горизонту через время $t = 0.5 \text{ с}$ после броска. Ускорение свободного падения $g = 9.8 \text{ м/с}^2$.

(pr4388; III)

6.36. Камень бросают с обрыва скалы с скоростью $v_0 = 12 \text{ м/с}$, направленной под углом к горизонту. Найти скорость камня, когда он окажется на $h = 5 \text{ м}$ ниже стартовой точки. Ускорение свободного падения $g = 9.8 \text{ м/с}^2$.

(pr3858; IV)

Повторение

6.37. Спортсмен, совершая утреннюю пробежку вдоль железной дороги, встречает два едущих навстречу ему поезда с интервалом $t_1 = 250 \text{ с}$. Известно, что со станции поезда отправляются с интервалом $t_2 = 300 \text{ с}$, а их скорость $u = 15 \text{ м/с}$. Какова скорость спортсмена?

(pr24; Гельфгат, 1.4; III)

6.38. Идет отвесный дождь. Скорость капель равна $u = 10 \text{ км/ч}$. Человек стоит на тележке, движущейся горизонтально со скоростью $v = 20 \text{ км/ч}$. Под каким углом к горизонтали человеку нужно держать зонт, чтобы на него попало как можно меньше капель?

(pr78; II)



6.39. Машина едет со скоростью $v_0 = 40 \text{ км/ч}$, затем водитель замечает на дороге пешехода и тормозит. В результате машина остановилась на очень малом расстоянии от пешехода. С какой скоростью машина врезалась бы в пешехода, если бы её начальная скорость была не v_0 , а $v = 50 \text{ км/ч}$ ($v > v_0$)? Торможение считать равноускоренным.

(pr32; IV)

Ответы

27. $r = t\sqrt{v_0^2 - gtv_0 \sin \alpha + \frac{1}{4}g^2t^2} \approx 15.6 \text{ м}$

28. $h = \frac{3v_0^2 \sin^2 \alpha}{8g}$

29. $\alpha = \arccos \frac{v}{v_0} = 60^\circ$

30. $v_{\min} = \sqrt{gL}$, $\alpha^* = 45^\circ$

31. $\alpha = \arctg 2 \approx 63^\circ$

32. $L = l + \frac{2lh}{gt^2} \approx 3.22 \text{ м}$

33. $H = \frac{gt^2}{8} \approx 11 \text{ м}$, $v_0 = \sqrt{\left(\frac{L}{t}\right)^2 + \left(\frac{gt}{2}\right)^2} \approx 22 \text{ м/с}$, $\alpha = \arctg \frac{gt^2}{2L} \approx 41^\circ$

34. $v = \sqrt{v_0^2 + \frac{g^2L^2}{v_0^2}}$

35. $v = \sqrt{v_0^2 - 2v_0gt \sin \alpha + g^2t^2} \approx 6.26 \text{ м/с}$, $\text{tg } \beta = \text{tg } \alpha - \frac{gt}{\cos \alpha}$, $\beta \approx 37^\circ$

36. $v = \sqrt{v_0^2 + 2gh} \approx 15.6 \text{ м/с}$

37. $v = u \frac{t_2 - t_1}{t_1} = 3 \text{ м/с}$

38. $\alpha = \arctg \frac{u}{v} \approx 27^\circ$

39. $v_{\kappa} = \sqrt{v^2 - v_0^2} = 30 \text{ км/ч}$

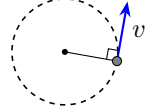
Подготовка к следующему занятию

Теория

6.40. Проработать теорию: разобраться, дополнить конспект, выучить.

Направление скорости при движении по окружности (tu36; I)

Если материальная точка движется по окружности, её вектор скорости в любой момент направлен по касательной к окружности и, стало быть, перпендикулярен радиусу, соединяющему материальную точку и центр окружности.



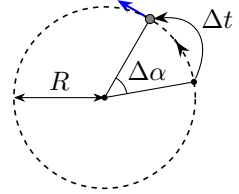
Определение (tu25; I)

Движение по окружности называется *равномерным*, если модуль скорости при движении сохраняется.

Определение угловой скорости (tu26; II)

Пусть материальная точка движется равномерно по окружности. Пусть за время Δt точка поворачивается вокруг центра окружности на угол $\Delta\alpha$ радиан.

Угловой скоростью при равномерном движении по окружности называют отношение угла поворота (в радианах) $\Delta\alpha$ ко времени поворота Δt :



$$\text{равномерное} \Rightarrow \omega = \frac{\Delta\alpha}{\Delta t}$$

Единица измерения угловой скорости — единица на секунду: $[\omega] = \frac{1}{\text{с}}$.

Замечание к определению ω (tu27; II)

Поскольку движение по окружности равномерное, угловая скорость $\omega = \Delta\alpha/\Delta t$ не зависит от выбранного промежутка времени Δt .

□ Возьмём какой-нибудь другой промежуток $\Delta t'$. Пусть n — это то, во сколько раз $\Delta t'$ больше Δt : $\Delta t' = n\Delta t$ (n может быть каким угодно положительным числом, в том числе и меньшим 1). Поскольку движение равномерное, то за n раз большее время будет пройден в n раз больший путь, а поскольку движение происходит по окружности, то и угол поворота будет в n раз больше — значит, он будет равен $n\Delta\alpha$. Посчитаем угловую скорость на промежутке $\Delta t'$:

$$\omega' = \frac{n\Delta\alpha}{n\Delta t} = \frac{\Delta\alpha}{\Delta t},$$

что есть угловая скорость, подсчитанная на промежутке Δt . ■

Определение периода (tu28; I)

Пусть материальная точка равномерно движется по окружности.

Периодом называется время полного оборота.

Период обозначается T и измеряется в секундах: $[T] = \text{с}$.

Определение частоты (tu29; I)

Пусть материальная точка равномерно движется по окружности.

Частота — это количество оборотов за единицу времени.

Частота обозначается ν и измеряется в единицах на секунду, что также называют *герцами*: $[\nu] = \frac{1}{\text{с}} = \text{Гц}$.

Связь периода и частоты (tu30)

Пусть при равномерном движении по окружности период равен T , частота равна ν . Тогда:

$$\nu = \frac{1}{T}$$

□ По определению частоты, за 1 секунду совершается ν оборотов. Поскольку движение равномерное, то за $1/2$ секунды будет $\nu/2$ оборотов, за $1/3$ секунды $\nu/3$ оборотов, и т. д. Значит, за $1/\nu$ секунд оборотов будет ν/ν , то есть ровно один. Значит, $1/\nu$ — это период. Отсюда и получаем формулу. ■

Связь периода и угловой скорости (tu31; I)

Пусть при равномерном движении по окружности период равен T , угловая скорость равна ω . Тогда:

$$\text{равномерное} \Rightarrow \omega = \frac{2\pi}{T}$$

□ По определению угловой скорости, $\omega = \frac{\Delta\alpha}{\Delta t}$, причём промежуток Δt можно взять каким угодно. Возьмём один период: $\Delta t = T$. За период будет совершён полный оборот, т.е. точка повернётся на угол $\Delta\alpha = 2\pi$. Итак, $\omega = \frac{\Delta\alpha}{\Delta t} = \frac{2\pi}{T}$. ■

Связь периода и скорости (tu32; I)

Пусть при равномерном движении по окружности радиуса R период равен T , скорость равна v по модулю. Тогда:

$$\text{равномерное} \Rightarrow v = \frac{2\pi R}{T}$$

□ Движение равномерное, значит $S = vt$. Применим эту формулу к одному обороту. Он проходится за период, значит, $t = T$, а путь равен длине окружности: $S = 2\pi R$. Итак, $v = \frac{S}{t} = \frac{2\pi R}{T}$. ■

Связь угловой и линейной скорости (tu34; II)

При равномерном движении по окружности линейная скорость v равна произведению угловой скорости ω на радиус окружности R :

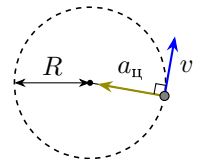
$$v = \omega R$$

□ Следует из формул $v = \frac{2\pi R}{T}$ и $\omega = \frac{2\pi}{T}$. ■

Ускорение при равномерном вращении (tu33; I)

Пусть материальная точка движется равномерно со скоростью v по окружности радиуса R . Тогда её ускорение направлено к центру (и потому называется *центростремительным*), а по модулю равно отношению квадрата скорости к радиусу:

$$a_{\text{ц}} = \frac{v^2}{R}$$



Доказательство (tu35; IV)

□ Пусть O — центр окружности, по которой движется тело A ; R — радиус окружности; v — модуль скорости, ω — угловая скорость.

Будем отталкиваться от утверждения о том, что ускорение — это скорость смещения конца вектора скорости, отложенного от фиксированной точки.

Зафиксируем некоторую точку O' , и будем от неё откладывать векторы скорости в разные моменты времени. Поскольку движение равномерное, модуль вектора скорости всегда равен одному и тому же значению v . Значит, концы векторов скорости в любой момент находятся на расстоянии v от точки O' , т.е. лежат на окружности радиуса v с центром в точке O' (*).

Далее, скорость тела направлена по касательной, т.е. всегда перпендикулярна радиусу OA . По мере движения тела радиус OA поворачивается с угловой скоростью ω , а значит и скорость тоже поворачивается вместе с радиусом OA с той же угловой скоростью ω (ведь она всегда перпендикулярна радиусу!). Поэтому конец вектора скорости (обозначим его A'), отложенный от фиксированной точки O' , поворачивается вокруг неё с угловой скоростью ω (**).

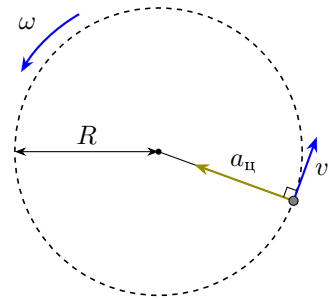
Совместив выводы (*) и (**), получим, что конец вектора скорости A' движется вокруг точки O' по окружности радиуса v с угловой скоростью ω . Как известно, при вращении точки по окружности её линейная скорость равна произведению угловой скорости на радиус. Применим это утверждение к точке A' . Скорость движения конца вектора скорости A' — это ускорение нашего тела A , угловая скорость равна ω , радиус $O'A'$ равен v . Итак, $a = v\omega$.

Наконец, $v = \omega R$, откуда $\omega = \frac{v}{R}$. Тогда получается, что $a = v\omega = v \frac{v}{R} = \frac{v^2}{R}$ ■

Равномерное движение по окружности: все формулы (tu37; II)

Равномерное $\Rightarrow v = \text{const}$, $\omega = \text{const}$.

$$\begin{array}{c} \boxed{\Delta S = v\Delta t} \quad \boxed{\Delta\alpha = \omega\Delta t} \\ \boxed{v = \frac{1}{T}} \quad \boxed{\omega = \frac{2\pi}{T}} \quad \boxed{v = \frac{2\pi R}{T}} \quad \boxed{v = \omega R} \\ \boxed{a = \frac{v^2}{R}} \end{array}$$



Упражнения

6.41. Тело, равномерно вращающееся по окружности, совершает $N = 40$ полных оборотов за время $t = 10$ с. Найдите период и частоту вращения тела

(pr3099; I)

6.42. Маховик делает $N = 3$ оборота за время $t = 1$ мин. Найдите угловую скорость вращения маховика.

(pr85; Русаков-1, 4.3; I)

6.43. Тело, равномерно вращающееся по окружности радиуса $R = 10$ см, совершает поворот на угол $\alpha = 20^\circ$ за время $t = 0.2$ с. Какова линейная скорость тела?

(pr967; II)

6.44. Угловая скорость вращения лопастей вентилятора $\omega = 20$ Гц. Найти центростремительное ускорение концов лопастей, если их линейная скорость равна $v = 4$ м/с.

(р552; Русаков-1, 4.4; I)

Ответы

41. $T = \frac{t}{N} = 0.25$ с; $\nu = \frac{N}{t} = 4$ Гц

42. $\omega = \frac{2\pi N}{t} = \frac{\pi}{10}$ Гц ≈ 0.31 Гц

43. $v = \frac{\alpha R}{t} \approx 0.17$ м/с

44. $a_n = \omega v = 80$ м/с²